

SUL CAPITOLO 6 del libro.

Teorema 6.2.9 (ROUCHÉ - CAPELLI)

Un sistema lineare $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$
(A matrice $n \times m$),
ha soluzione se e solo se $\uparrow b$

$$\text{rang} A = \text{rang} (A|b)$$

Inoltre, se ha soluzione,

1) ha una sola soluzione se e solo se

$$\text{rang} A = \text{rang} (A|b) = n$$

2) ^{ha} infinite soluzioni se

$$\text{rang} A = \text{rang} (A|b) < n$$

In tal caso ci sono $n - \text{rang} A$ variabili libere.

ABBIAMO GIÀ DIMOSTRATO QUESTO
TEOREMA

Teorema G.2.8 (Teorema di struttura
dei sistemi lineari)

Sia A una matrice $m \times n$

e consideriamo il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni è

$$S = \left\{ v + z \mid z \in \text{Ker } A \right\}$$

dove v è una qualunque soluzione
del sistema. Dunque $S = v + \text{Ker } A$

Dim

↑
"traslato di $\text{Ker } A$,"

Sia v una soluzione del sistema

Allora, chiamando $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$A v = b$$

Ora sia $z \in \text{Ker } A$.

Calcolo

$$\begin{aligned} A(v+z) &= Av + Az = b + 0 \\ &= b \end{aligned}$$

Dunque $v+z \in S$

Viceversa, mostriamo ora che se
 $v' \in S$, possiamo scrivere

$$v' = v + z' \text{ per un}$$

certo $z' \in \text{Ker } A$.

Cosa so? So che

$$A v = b$$

$$\text{e} \quad A v' = b$$

Allora sottraendo

$$A v' - A v = b - b$$

$$A(\overset{!}{v} - v) = 0$$

allunque $\overset{!}{v} - v \in \text{Ker } A$

chiamo $\overset{!}{v} - v = z' \in \text{Ker } A$

In conclusione

$$\overset{!}{v} = v + z'$$



STUDIATE CAP 6 e fate ESERCIZI

CAPITOLO 7

Il determinante è un numero che

si associa ad una matrice quadrata.
Caso $A \ 1 \times 1$

$$A = (a_{11})$$

$$\text{Rango } \det A = a_{11}$$

$$\text{Esempio } A = (3)$$

$$\det A = 3$$

Caso $A \ 2 \times 2$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\text{Rango } \det A = ad - bc$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 10 - 12 = -2$$

Caso A 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- si sceglie una riga o una colonna

- la si "percorre" nel seguente modo: Supponiamo di aver scelto la seconda riga

$$\det A = (-1)^{2+1} a_{21} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \cdot \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+3} a_{23} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

io
Simpio

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$\swarrow a_{13}$
 $\swarrow a_{23}$
 $\swarrow a_{33}$

según la tercera columna.

$$= (-1)^{3+1} (-1) \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 0 M_1$$

$$+ (-1)^{3+3} 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 11 + 5 \cdot (-5) =$$

$$= -11 - 25 = -36$$

Caso A $n \times n$

$A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$
 • si sceglie
 una riga o una colonna.

Supponiamo di aver scelto la
 i -esima riga.

Si pone

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \hat{A}_{ij}$$

dove $\hat{A}_{ij}$ è la matrice A
 a cui ho levato la i -esima
 riga e la j -esima colonna.

SPECIAL OFFER

ONLY
FOR
 3×3
MATRICES

Yua $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1	2	-1	1	2
2	-1	0	2	-1
3	4	5	3	4

$$1 \cdot (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \cdot 4$$

$$- (3 \cdot (-1) \cdot (-1)) - (4 \cdot 0 \cdot 1)$$

$$- (5 \cdot 2 \cdot 2) = -5 + 0 - 8$$

$$-3 - 0 - 20 = -36$$

Questa è la cosiddetta

"regola di SARRUS"

SI DIMOSTRA (FACOLTATIVO,
eventualmente guardate APPENDICE
7.9 del LIBRO)

che $\det$ è una funzione ben
definita

$$\det : \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\begin{matrix} | \\ \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C} \end{matrix}$$

Alcune proprietà del determinante

① se scambio fra loro
due righe di A e creo
la matrice A' ,

vale

$$\det A' = - \det A$$

Lo stesso se scambio fra loro
due colonne.

(2) se alla riga i -esima
di A sommo la riga j -esima
moltiplicata per $\lambda \in \mathbb{K}$,
creo la matrice A'' e vale

$$\det A'' = \det A$$

Lo stesso per le colonne.

(3) se moltiplico una riga
di A per $\lambda \in \mathbb{K}$
creo la matrice A''' e vale

$\det A''' = 1 \det A$.
Lo stesso per le colonne.

Oss Dunque se ad una matrice A applico delle mosse di riga di tipo ① e ② (COME SOPRA) posso ridurla a zedoni per righe ($\bar{A}$) e vale

$$\det \bar{A} = \pm \det A$$

Oss Se A ha due righe uguali

$$\det A = 0$$

(perché vale $\det A = -\det A$
per la regola ⑨)

Lo stesso se A ha due colonne
uguali.

Oss Se A ha una riga
(0 0 0 0 0 0) allora

$$\det A = 0$$

Lo stesso se A ha una colonna
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gaussian Calculation

$$\det \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1027} \\ 0 & -8 & 2 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}} \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2^{\sqrt{3} + \sin \frac{2\pi}{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 \det \begin{pmatrix} \cancel{-8} & \cancel{2} & \cancel{\sqrt{3}} & \cancel{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{17}}} \\ 0 & 4 & 8 & 91 \\ 0 & 0 & 5 & 2^{\sqrt{3} + \sin \frac{2\pi}{7}} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{||}$$

$$= 3 \cdot (-8) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 8 & 91 \\ 0 & 5 & e^{\sqrt{3} + 2\pi i \frac{21}{7}} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-8) \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2$$

MORALE: il det di una matrice della forma

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & \text{wavy} \\ & d_2 & \text{wavy} \\ & & \ddots & \text{wavy} \\ & 0 & & d_m \end{pmatrix}$$

↑
"TRIANGOLARE
SUPERIORE,"

$$\bar{e} \quad d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdots d_n.$$

Vale anche se A è "triangolare inferiore,"

Esempio

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 8 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 8 = 16$$

Oss $\approx A = Id = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$

Vale.

$$\det A = 1.$$

Relazione fra determinante e rango
di una matrice A .

Sia A una matrice $m \times n$

Dato un S intero positivo

$$S \leq \min(m, n)$$

posso scegliere S righe di A

$$l_1, l_2, \dots, l_S$$

e S colonne di A

$I_1, I_2, \dots, I_S$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 9 \\ 1 & -2 & -2 & 8 \\ 4 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$S=2$ $\uparrow$ ottengo $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

e creo una sottomatrice $S \times S$

come nell'esempio. che si chiama
"MINORE"

Es (COMBINATORIA) Data $A_{m \times n}$
quanti minori $S \times S$ posso creare?

$$\binom{m}{S} \cdot \binom{n}{S}$$

Obs i minori di una matrice

A sono matrici quadrate dunque
posso calcolare i loro determinanti;

Teorema Sia A una matrice

$m \times n$. Sia k il massimo
intero tale che esiste un minore
di A $k \times k$ con determinante $\neq 0$

Allora $\text{rank } A = k$.

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2
(come si verifica
mettendola a
scalini)

Verifichiamo il teorema dei minori

- esiste un minore 2×2
con $\det \neq 0$

$$\text{es: } \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 6 = -3$$

- si controllano i minori 3×3

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \end{array}$$

$$3 + 2 + 4 + 1 + 2 - 12 = 0$$

Provando tutti i 16 minori
 3×3 troveremo che il loro
 $\det \bar{=} 0$.

- si controlla anche il ~~minore~~ 4×4
che è A stesso

$$\det A = 0$$

Corollario Una matrice A
 $n \times n$ è invertibile se e
solo se $\det A \neq 0$

Dim. A è invertibile se

e solo se ha rango n se e solo se (per teo sopra) $\det A \neq 0$

(confrontate Teorema 7.6.1 del libro)

Esercizio Il determinante di Vandermonde

Caso 2×2

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_1$$

Caso 3×3

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} = (a_3 - a_1) \cdot$$

$$\cdot (a_2 - a_1) \cdot (a_3 - a_2) = \prod_{i > j} (a_i - a_j)$$

Case 4×4

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \textcircled{a_4^2} \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_4 - a_1)(a_4 - a_2)(a_4 - a_3)(a_3 - a_1)$$

$$(a_3 - a_2)(a_2 - a_1) = \prod_{i > j} (a_i - a_j)$$

Facciamo il 4×4
 Trasformo la matrice con mosse di riga.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 - a_4 a_1^2 & a_2^3 - a_4 a_2^2 & a_3^3 - a_4 a_3^2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$a_2^3 - a_4 a_2^2$$

$$a_3^3 - a_4 a_3^2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 - a_1 a_4 & a_2^2 - a_2 a_4 & a_3^2 - a_3 a_4 & 0 \\ a_1^2 (a_1 - a_4) & a_2^2 (a_2 - a_4) & a_3^2 (a_3 - a_4) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 - a_4 & a_2 - a_4 & a_3 - a_4 & 0 \\ a_1(a_1 - a_4) & a_2(a_2 - a_4) & a_3(a_3 - a_4) & 0 \\ a_1^2(a_1 - a_4) & a_2^2(a_2 - a_4) & a_3^2(a_3 - a_4) & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow a_{14}$$

sviluppo rispetto alla ultima
colonna

$$(-1)^5 \cdot 1 \cdot$$

$$\det \begin{pmatrix} a_1 - a_4 & a_2 - a_4 & a_3 - a_4 \\ a_1(a_1 - a_4) & a_2(a_2 - a_4) & a_3(a_3 - a_4) \\ a_1^2(a_1 - a_4) & a_2^2(a_2 - a_4) & a_3^2(a_3 - a_4) \end{pmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \uparrow$

$$= (-1)^5 (a_1 - a_4) (a_2 - a_4) (a_3 - a_4)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

e ora induttivamente.

$$= (-1)^5 (a_1 - a_4) (a_2 - a_4) (a_3 - a_4)$$

$$(a_3 - a_2) (a_3 - a_1) (a_2 - a_1)$$

$$= \prod_{i > j} (a_i - a_j)$$

Ricardo / ripasso di come avete
studiato le successioni lineari
a coeff costanti
definite per ricorrenza

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = -3$$

$$a_n = k_1 a_{n-1} + k_2 a_{n-2} + k_3 a_{n-3}$$

le resolviamo creando il polinomio

$$p(x) = x^3 - k_1 x^2 - k_2 x - k_3$$

tipo

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

$$p(x) = x^2 - x - 1$$

se ne siete capaci, trovate 3 radici

$$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

supp che

$$\alpha \neq \beta$$

$$\gamma \neq$$

Cerco le successioni del tipo

$$a\alpha^n + b\beta^n + c\gamma^n$$

e impone le condizioni iniziali

$$\begin{cases} a\alpha^0 + b\beta^0 + c\gamma^0 = 1 \\ a\alpha^1 + b\beta^1 + c\gamma^1 = 2 \\ a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 = -3 \end{cases}$$

ora cerco le soluzioni del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

↑
è di Vandermonde

il suo det è

$$(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha)(\beta - \alpha) \neq 0$$

dunque ha rango 3
dunque rango completa =

= rango incompleto = 3

ovvìa il sistema ha 1 e 1
sola soluzione.

$$\left[\begin{array}{l} \text{se le radici fossero state } \alpha, \alpha, \beta \\ a \alpha^n + b n \alpha^{n-1} + c \beta^n \end{array} \right]$$

Un'altra informazione sul determinante:

TEOREMA DI BINET

Siano A, B matrici $n \times n$

allora $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

Segnalazione Nel paragrafo 7.4 del libro si spiega come, data una matrice A invertibile, si possono calcolare i coefficienti della matrice inversa B tramite il calcolo di determinanti di minori di A .

Non lo mettiamo nel programma del corso. Noi tratteremo B

(la prossima lezione) col metodo descritto nel paragrafo 7.5.